**Лекция №5.**

**Теория Фредгольма.**

 Теория Фредгольма изучает линейные интегральные уравнения II рода.

  (1)

Построим решение этого уравнения методом последовательных приближений в .

В качестве начального приближения возьмем , приближения к решению будем строить по рекуррентной формуле

 . (2)

**Теорема 1.** Пусть в уравнение (1) ядро  непрерывно в замкнутом квадрате, . Пусть  непрерывна на . Если  и , то непрерывное на  решение  уравнения (1) существует и единственно. Последовательные приближения  равномерно на  сходится к  при .

Доказательство. Последовательно, применяя формулу (2) и учитывая выбор начального приближения, получим

 ,





,

где .







,

 и т.д.

Тогда

,

где  или

  - частичные суммы ряда

. (3)

Оценим общий член этого ряда

.

Учитываем, что , ,

,

 и т.д.

 

.

Функциональный ряд (3) мажорируется числовым рядом

. (4)

Если  удовлетворяет условию , то числовой ряд (4) сходится, т.к. представляет собой сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем . Тогда по признаку Вейерштрасса функциональный ряд (3) сходится абсолютно и равномерно на .

 Если , то  - непрерывная функция,  - непрерывная функция и т.д.,  - непрерывная функция. Следовательно, функциональный ряд (3) состоит из непрерывных функций. Откуда следует, что  равномерно сходится при  к непрерывной функции на .

 Перейдем к пределу при  в (2), получим

.

Следовательно,  решение интегрального уравнения (1).

Докажем, что другого непрерывного решения уравнения (1) на  нет. Пусть  является непрерывным решением уравнения (1) на . Тогда функция  удовлетворяет однородному уравнению.

.

Если  не равно тождественно нулю, то

.

Пришли к противоречию. Следовательно,  на .

Вспомни некоторые факты, которые нам понадобятся в дальнейшем.

1. 
2. Скалярное произведение линейно относительно постоянных сомножителей

, .

1. , , 
2. ,  .

Величина  называется нормой функции .

Напомним определение сходимости в среднем. Пусть функции  и ,  квадратично суммированы на . Если , то говорят, что    в средне квадратичном.

 Одна и та же последовательность функций не может сходится в среднем к двум различным функциям.

 Допустим, что существует два предела  и , тогда , .

   .

Известны, следующие теоремы:

 Для того, чтобы последовательность квадратично суммируемых функций  сходилась в среднем, необходимо и достаточно, чтобы .

 Ряд , члены которого квадратично суммированы в  сходится в среднем и имеет сумму квадратично суммируемую функцию , если к этой функции сходится в среднем последовательность частичных сумм данного ряда.

 Для того чтобы ряд сходился в среднем, необходимо и достаточно, чтобы

 .

 Если ряд сходится в среднем, то его можно интегрировать почленно, предварительно умножив на любую квадратично суммируемую функцию.

 Действительно, пусть ряд  сходится в среднем, а - квадратичная суммируемая.

 Оценим разность

.

По неравенству Коши-Буняковского

.

По определению сходимости в среднем, для любого  найдется : , . Отсюда

 для , что равносильно равенству

.

Полагая , можно последнее равенство представить в виде

.

Таким образом, сходящийся в среднем ряд можно скалярно умножать на любую квадратично суммируемую функцию.